

§ 126. Диаграммы Фейнмана

Мы рассмотрим теперь правила вычисления вероятностей перехода из одного состояния в другое с помощью расчетного аппарата, приведенного в предыдущих параграфах. Для простоты рассмотрим сначала одну частицу (например, электрон, которая переходит из одного состояния в другое под действием внешнего электромагнитного поля. Пусть электрон в начальный момент времени $t = t_1$ находится в состоянии $\psi(\mathbf{r}_1, t_1) = \psi(1)$, а в момент времени $t = t_2$ — в состоянии $\psi(\mathbf{r}_2, t_2) = \psi(2)$, отвечающем положительной энергии. Вероятность перехода в некоторое состояние $\psi_n(\mathbf{r}_2, t_2)$, как всегда, определяется квадратом модуля соответствующей амплитуды разложения функции $\psi(\mathbf{r}_2, t_2)$ по функциям $\psi_n(\mathbf{r}_2, t_2)$:

$$M = \int \psi_n^+(\mathbf{r}_2, t_2) \psi(\mathbf{r}_2, t_2) d^3x_2. \quad (126,1)$$

Выражая функцию $\psi(\mathbf{r}_2, t_2)$ через функцию Грина по формуле (124,14), получаем

$$M = \int \psi_n^+(\mathbf{r}_2, t_2) K^A(\mathbf{r}_2, t_2; \mathbf{r}_1, t_1) \beta \psi(\mathbf{r}_1, t_1) d^3x_1 d^3x_2.$$

Вместо функции Грина K^A можно написать ее разложение в ряд последовательных приближений. При этом получим выражение для амплитуды перехода M в виде ряда теории возмущений. Так, например, амплитуда перехода в первом приближении теории возмущений равна

$$M^{(1)} = -e \int \psi_n^+(2) K(2, 3) \hat{A}(3) K(3, 1) \beta \psi(1) d^3x_1 d^3x_2 d^4x_3. \quad (126,2)$$

Это выражение можно представить в более компактном виде, используя соотношения

$$\psi(3) = \int K(3, 1) \beta \psi(1) d^3x_1, \quad \bar{\psi}_n(3) = \int \bar{\psi}_n(2) \beta K(2, 3) d^3x_2.$$

Тогда для амплитуды перехода имеем

$$M^{(1)} = -e \int \bar{\psi}_n(3) \hat{A}(3) \psi(3) d^4x_3. \quad (126,3)$$

Аналогичным образом легко получить второе приближение амплитуды перехода

$$M^{(2)} = (-e)^2 \int \bar{\psi}_n(3) \hat{A}(3) K(3, 4) \hat{A}(4) \psi(4) d^4x_3 d^4x_4. \quad (126,4)$$

Если начальное и конечное состояния описываются плоскими волнами, то формулы (126,3) и (126,4) удобно переписать

в импульсном представлении. Полагая

$$\bar{\psi}_n(3) = \bar{u}(p_2) e^{-ip_2 x_3}, \quad \psi(3) = u(p_1) e^{ip_1 x_3}$$

и используя фурье-представление оператора $\hat{A}$

$$\hat{A}(3) = \int \hat{a}(k) e^{ikx_3} d^4k, \quad (126,5)$$

получаем для амплитуды перехода первого порядка (126,3):

$$\begin{aligned} M^{(1)} &= -e \int d^4x_3 \int e^{-ip_2 x_3 + ikx_3 + ip_1 x_3} \bar{u}(p_2) \hat{a}(k) u(p_1) d^4k = \\ &= -e (2\pi)^4 \int \bar{u}(p_2) \hat{a}(k) \delta^4(k + p_1 - p_2) u(p_1) d^4k = \\ &= -e (2\pi)^4 \bar{u}(p_2) \hat{a}(p_2 - p_1) u(p_1). \end{aligned} \quad (126,6)$$

Для амплитуды перехода второго порядка соответственно имеем:

$$\begin{aligned} M^{(2)} &= (-e)^2 \int \bar{u}(p_2) \hat{a}(k_1) S(p) \hat{a}(k) u(p_1) d^4p d^4k d^4k_1 \times \\ &\times \int e^{-ip_2 x_3 + ik_1 x_3 + ip(x_3 - x_4) + ikx_4 + ip_1 x_4} d^4x_3 d^4x_4 = \\ &= e^2 (2\pi)^8 \int \bar{u}(p_2) \hat{a}(k_1) \delta^4(k_1 + p - p_2) S(p) \hat{a}(k) \delta^4(p_1 + k - p) u(p_1) \times \\ &\times d^4p d^4k d^4k_1 = e^2 (2\pi)^8 \int \bar{u}(p_2) \hat{a}(p_2 - p_1 - k) \frac{1}{i(2\pi)^4 [i(\hat{p}_1 + \hat{k}) + m]} \times \\ &\times \hat{a}(k) u(p_1) d^4k. \end{aligned} \quad (126,7)$$

Формулами (126,6) и (126,7) можно сопоставить наглядные схемы, получившие название диаграмм Фейнмана. Как будет пояснено ниже, каждой линии и каждому пересечению линий (именуемому вершиной) на диаграмме Фейнмана отвечает определенный множитель в амплитуде перехода. В случае сложных процессов подобные диаграммы позволяют упростить построение выражений для амплитуд переходов.

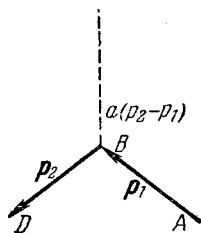


Рис. 31.

Будем изображать на диаграмме Фейнмана состояния электронов и позитронов сплошными линиями, состояния электромагнитного поля — пунктирными линиями. Стрелки на линиях показывают последовательность написания членов в амплитуде перехода. Возрастанию времени отвечает движение частицы по линии справа налево.

Рассмотрим простейшую диаграмму Фейнмана (рис. 31), отвечающую следующему процессу: электрон с импульсом p_1 рассеялся на внешнем электромагнитном поле и перешел в новое

состояние с импульсом p_2 . Амплитуда вероятности этого перехода дается формулой (126,6). На рис. 31 свободный электрон с импульсом p_1 изображен сплошной прямой AB . Этой прямой в амплитуде перехода $M^{(1)}$ отвечает первый множитель (множители нумеруются справа налево) — биспинор $u(p_1)$. В точке B электрон рассеивается на электромагнитном поле, изображенном пунктирной линией. Пересечению сплошной и пунктирной линии (вершине) на диаграмме Фейнмана в амплитуде перехода $M^{(1)}$ отвечает оператор $-e\hat{a}(k)$, умноженный на δ -функцию от импульсов всех трех частиц. Электрон с импульсом p_2 изображен прямой BD . В амплитуде $M^{(1)}$ ему отвечает биспинор $\bar{u}(p_2)$.

Мы видим, что порядок процесса по заряду e определяется числом вершин на диаграмме Фейнмана. Это особенно ясно видно из рассмотрения диаграммы Фейнмана для процесса второго порядка (рис. 32). Эта диаграмма отвечает процессу рассеяния электрона во втором приближении теории возмущений. Линия AB (именуемая внешней линией) изображает движение свободного электрона. Ей соответствует биспинор $u(p_1)$ в амплитуде перехода $M^{(2)}$. В вершине B происходит рассеяние электрона. В амплитуде перехода $M^{(2)}$ вершине B отвечает множитель $-e\hat{a}(k)$ и δ -функция от импульсов $\delta^4(p_1 + k - p)$. Линия BC , соединяющая две вершины, называется внутренней линией. Ей в $M^{(2)}$ соответствует множитель S — фурье-компонента функции Грина, определенная формулой (124,8). В вершине C действует внешнее поле. Вершине C соответствует в $M^{(2)}$ оператор $-e\hat{a}(k_1)$ и δ -функция $\delta^4(k_1 + p - p_2)$. Внешняя линия CD изображает движение электрона с импульсом p_2 . Линии CD в $M^{(2)}$ отвечает биспинор $\bar{u}(p_2)$. Поскольку закон сохранения 4-импульса при переходе из состояния p_1 в состояние p_2 выполняется при произвольном значении волнового вектора k , то по вектору k (или k_1) производится интегрирование. Величина числового множителя в выражении для амплитуды определяется числом входящих в нее δ -функций, равным числу вершин. Каждая вершина вносит в $M^{(2)}$ множитель $(2\pi)^4$.

Совершенно таким же образом может быть построена диаграмма Фейнмана для процессов, происходящих с участием позитронов. Например, диаграмма рис. 32 описывает также рассеяние позитрона во втором приближении теории возмущений. Так как в теории Фейнмана позитрон рассматривается как электрон, движущийся обратно во времени, то эта диаграмма

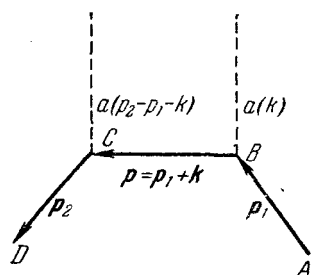


Рис. 32.

определяет амплитуду перехода позитрона из состояния с импульсом $-p_2$ в состояние с импульсом $-p_1$. Для вершины $M^{(2)}$ в этом случае имеем

$$M^{(2)} = \frac{1}{i} e^2 (2\pi)^4 \int \bar{v}(p_2) \hat{a}(p_2 - p_1 - k) \frac{1}{i(\hat{p}_1 + \hat{k}) + m} \hat{a}(k) v(p_1) d^4k. \quad (126,8)$$

Здесь v — биспинор Дирака, отвечающий состоянию с отрицательной энергией.

Помимо процессов рассеяния во внешнем электромагнитном поле, выведенные соотношения дают возможность рассмотреть процессы, связанные с излучением и поглощением свободных фотонов. Для этого в общих формулах (126,3) и (126,4) оператор $\hat{A}$ должен соответствовать полю одного излученного или одного поглощенного фотона. В согласии с формулами (102,3) (102,5) полю излученного фотона отвечает вектор-потенциал

$$A_\mu = \sqrt{\frac{2\pi}{\omega}} e_\mu e^{-ikx}, \quad (126,9)$$

а поглощенному фотону соответственно

$$A_\mu = \sqrt{\frac{2\pi}{\omega}} e_\mu e^{ikx}. \quad (126,10)$$

Здесь e_μ — вектор поляризации, а k означает четырехмерный волновой вектор. Так как поглощается или излучается только один фотон, то матричные элементы операторов $\hat{a}$ и $\hat{a}^+$ равны единице. Диаграммы, изображенные на рис. 33, описывают процессы с участием двух свободных фотонов. Так, например, эти диаграммы описывают процесс комптоновского рассеяния, т. е. рассеяния фотона на свободном электроне. В этом процессе фотон до рассеяния имел волновой вектор k_1 , а после рассеяния $-k_2$.

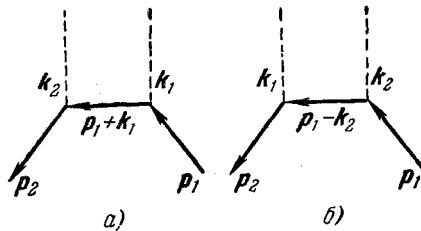


Рис. 33.

На диаграмме рис. 33, а соответствует тому, что фотон сначала поглощается, а затем испускается электроном. Этому же процессу отвечает и диаграмма рис. 33, б, когда сначала испускается фотон k_2 , а затем поглощается фотон k_1 . Разумеется, слова «сначала» и «затем» относятся лишь к порядку написания множителей в амплитуде перехода и не имеют какого-либо другого физического смысла.

Диаграммы Фейнмана, изображенные на рис. 33, позволяют сразу написать амплитуду перехода, не делая каждый раз спе-

циальных вычислений такого типа, какие делались при выводе формул (126,6) и (126,7). Полная амплитуда перехода определяется суммой амплитуд, отвечающих диаграммам 33, а и 33, б.

Она имеет вид

$$M = \frac{e^2}{i} (2\pi)^4 \left[\bar{u}(p_2) \sqrt{\frac{2\pi}{\omega_2}} \hat{e}_2 \frac{1}{i(\hat{p}_1 + \hat{k}_1) + m} \sqrt{\frac{2\pi}{\omega_1}} \hat{e}_1 u(p_1) + \right. \\ \left. + \bar{u}(p_2) \sqrt{\frac{2\pi}{\omega_1}} \hat{e}_1 \frac{1}{i(\hat{p}_1 - \hat{k}_2) + m} \sqrt{\frac{2\pi}{\omega_2}} \hat{e}_2 u(p_1) \right] \delta^4(p_1 + k_1 - p_2 - k_2), \quad (126,11)$$

где $\hat{e}_1 = e_{1\mu} \gamma_\mu$; $\hat{e}_2 = e_{2\mu} \gamma_\mu$, а $e_{1\mu}$ и $e_{2\mu}$ — векторы поляризации фотона до и после рассеяния.

Появление δ -функции легко понять, если учесть, что в данном случае в выражении типа (126,4) вместо оператора внешнего поля вида (126,5) подставляются выражения типа (126,9) и (126,10), не содержащие интегрирования по k . Таким образом, в выражении типа (126,7) будет отсутствовать интегрирование по k и k_1 . После интегрирования по p остается одна δ -функция, выражающая закон сохранения энергии и импульса при комптон-процессе.

Диаграммы такого же типа описывают, например, процесс аннигиляции электрона с импульсом p_1 и позитрона с импульсом $-p_2$. При аннигиляции образуется два фотона

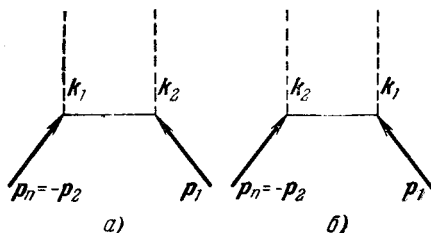


Рис. 34.

с импульсами k_1 и k_2 (рис. 34). Амплитуда двухфотонной аннигиляции пары по тем же правилам запишется в виде

$$M = \frac{1}{i} e^2 (2\pi)^5 \frac{1}{V \omega_1 \omega_2} \times \\ \times \left\{ \bar{v}(p_2) \left[\hat{e}_1 \frac{1}{i(\hat{p}_1 - \hat{k}_2) + m} \hat{e}_2 + \hat{e}_2 \frac{1}{i(\hat{p}_1 - \hat{k}_1) + m} \hat{e}_1 \right] u(p_1) \right\} \times \\ \times \delta^4(p_1 - p_2 - k_1 - k_2). \quad (126,12)$$

В качестве другого примера рассмотрим тормозное излучение электрона, т. е. излучение, возникающее при пролете быстрого электрона в поле ядра. Диаграмма, отвечающая этому процессу, представлена на рис. 35.

Электрон с импульсом p_1 , рассеиваясь на внешнем поле a , излучает фотон импульса k и поляризации e и переходит в состояние с импульсом p_2 . При этом возможны два процесса, изображенные на диаграммах рис. 35, а и б.

Полная амплитуда перехода, в соответствии с изложенными правилами, имеет вид

$$M = \frac{e^2}{i} \frac{(2\pi)^{3/2}}{\sqrt{\omega}} \bar{u}(p_2) \left[\hat{a}(p_2 - p_1 + k) \frac{1}{i(\hat{p}_1 - \hat{k}) + m} \hat{e} + \right. \\ \left. + \hat{e} \frac{1}{i(\hat{p}_2 + \hat{k}) + m} \hat{a}(p_2 + k - p_1) \right] u(p_1). \quad (126,13)$$

Рассмотрим теперь процессы, связанные с взаимодействием двух частиц, например, рассеяние электрона на μ -мезоне. Амплитуда перехода вычисляется опять разложением волновой

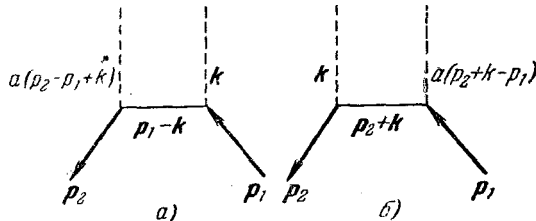


Рис. 35.

функции системы по произведениям волновых функций свободных частиц. Волновая функция системы двух частиц определяется функцией Грина (125,5). Эти

вычисления приводят к графикам, которые строятся по тем же принципам, что и для случая одной частицы. В первом приближении теории возмущений процессу рассеяния соответствует диаграмма Фейнмана, изображенная на рис. 36.

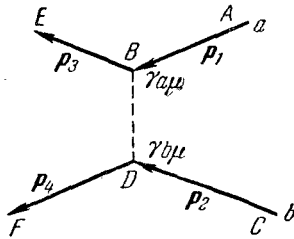


Рис. 36.

Здесь сплошные линии AB и CD соответствуют движению свободных частиц с импульсами p_1 и p_2 . Электромагнитное взаимодействие между частицами сводится к обмену фотонами. В вершине B происходит излучение виртуального фотона, который поглощается второй частицей (вершина D). Линии BE и DF отвечают движению частиц после взаимодействия с импульсами p_3 и p_4 .

Амплитуда перехода составляется по тем же правилам и имеет вид

$$M = e^2 (2\pi)^8 \bar{u}_a(p_3) \bar{u}_b(p_4) \gamma_{a\mu} D_f(p_1 - p_2) \times \\ \times \gamma_{b\mu} u_a(p_1) u_b(p_2) \delta^4(p_3 + p_4 - p_1 - p_2). \quad (126,14)$$

Здесь D_f — компонента Фурье функции распространения виртуального фотона D , которая согласно (125,5) и (125,6) дается формулой

$$D_f(k) = -\frac{i}{4\pi^3} \frac{1}{k^2}. \quad (126,15)$$

Остановимся кратко на поправках, которые возникают в высших приближениях теории возмущений. Диаграммы, отвечающие этим поправкам, естественно, должны содержать большее число вершин по сравнению с соответствующей основной диаграммой (каждой вершине отвечает параметр малости e). Именно числом вершин и определяется порядок малости рассматриваемой поправки.

Рассмотрим, например, диаграммы, отвечающие следующему приближению к теории комптон-эффекта. Как легко понять, диаграмме рис. 33, а соответствуют поправки на рис. 37. Аналогично и для диаграммы рис. 33, б. Все эти диаграммы отличаются от исходной диаграммы (см.

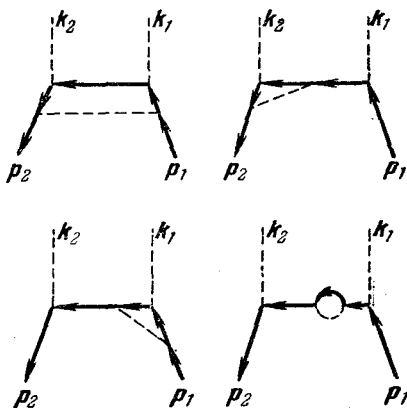


Рис. 37.

рис. 33) наличием внутренней фотонной линии. Эта линия отвечает, как мы уже видели, излучению и поглощению виртуального кванта. Поэтому эти поправки обычно называются радиационными. Вычисление этих поправок связано с определенными трудностями и потребовало разработки так называемого метода перенормировок. Мы не будем останавливаться на этих вопросах¹⁾.

§ 127. Комптон-эффект

Для иллюстрации техники расчета эффективных сечений в теории Фейнмана рассмотрим подробнее теорию комптон-эффекта. Амплитуда перехода для этого процесса была уже получена с помощью диаграммы Фейнмана (см. рис. 33) и имела вид (126,11). Выделяя δ -функцию, напишем амплитуду перехода в виде

$$M = M_{21} \delta^4(p_1 + k_1 - p_2 - k_2), \quad (127,1)$$

¹⁾ См., например, А. И. Ахиезер и В. Б. Берестецкий, Квантовая электродинамика, «Наука», 1969.