

### Тема 3. Плотность вероятности и поток вероятности в уравнении Дирака.

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \left( -i \hat{\alpha} \hat{\nabla} + m \hat{\beta} \right) \Psi$$

$$\hat{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \quad \hat{\beta} = \begin{pmatrix} \hat{1} & 0 \\ 0 & -\hat{1} \end{pmatrix}$$

$$(\hat{\alpha}^+ = \hat{\alpha} \quad \hat{\beta}^+ = \hat{\beta}) - \text{эрмитовы.}$$

Возьмем эрмитово сопряжение к уравнению Дирака:

$$-i \frac{\partial \Psi^+}{\partial t} = i \left( \hat{\nabla} \Psi^+ \right) (\hat{\alpha})^+ + m \Psi^+ \hat{\beta}^+ \quad (\text{вспомним, что } (\hat{A}\hat{B})^+ = \hat{B}^+ \hat{A}^+).$$

Вычтем из уравнения Дирака, умноженного на  $\Psi^+$ , комплексно сопряженное, умноженное на  $\Psi^+$ :

$$i \Psi^+ \frac{\partial \Psi}{\partial t} + i \frac{\partial \Psi^+}{\partial t} \Psi = -i \left( \hat{\nabla} \Psi^+ \right) \hat{\alpha} \Psi - i \Psi^+ (\vec{\alpha}) (\vec{\nabla} \Psi) + m \hat{\beta} \Psi^+ \Psi - m \hat{\beta} \Psi^+ \Psi$$

$$\left( \Psi^+ \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \frac{\partial \Psi^+}{\partial t} \Psi \right) = - \left( (\nabla \Psi^+) \hat{\alpha} \Psi + \Psi^+ \hat{\alpha} \hat{\nabla} \Psi \right) = - \vec{\nabla} (\Psi^+ \hat{\alpha} \Psi)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{\nabla} \vec{j}) = 0$$

$\rho = \Psi^+ \Psi = \Psi_1^* \Psi_1 + \Psi_2^* \Psi_2 + \Psi_3^* \Psi_3 + \Psi_4^* \Psi_4 \geq 0$  - плотность вероятности - хорошо определенная величина.

$$\vec{j} = \Psi^+ \hat{\alpha} \Psi - \text{поток вероятности.}$$

### 8. Решение уравнения Дирака для свободной частицы.

Запишем уравнение Дирака в обычном виде:

$$i \hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = c \left( \hat{\alpha} \cdot \hat{p} + m c^2 \hat{\beta}_4 \right) \Psi, \quad A_\mu = 0$$

Представим в виде:

$$\Psi = \Psi_0 \exp \left( - \frac{i E t}{\hbar} \right)$$

$$E \Psi_0 = \left( c \hat{\alpha} \hat{p} + m c^2 \hat{\beta}_4 \right) \Psi_0$$

Решение ищем в виде бегущей волны:

$$\Psi_0 = u \exp\left\{\frac{i\vec{p}\vec{r}}{\hbar}\right\}$$

$$Eu = \left(c\hat{\alpha}\hat{p} + mc^2\hat{p}_4\right)u$$

Решение для  $u$

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w \\ w' \end{pmatrix} \quad w = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \quad w' = \begin{pmatrix} u_3 \\ u_4 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_x = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_x \\ \sigma_x & 0 \end{pmatrix} \quad \beta_x = \begin{pmatrix} \hat{1} & 0 \\ 0 & -\hat{1} \end{pmatrix}$$

Оператор приобретает вид:

$$\begin{cases} Ew = c \cdot \hat{\sigma} \hat{p} w' + mc^2 w \\ Ew = c \cdot \hat{\sigma} \hat{p} w + mc^2 w' \end{cases}$$

Запишем:

$$(mc^2 - E)w + c \hat{\sigma} \hat{p} w' = 0$$

$$\begin{pmatrix} c \hat{\sigma} \hat{p} w' & (-mc^2 - E) \end{pmatrix} w' = 0$$

Необходимое решение:

$$\begin{vmatrix} mc^2 - E & c(\hat{\sigma} \hat{p}) \\ c(\hat{\sigma} \hat{p}) & mc^2 - E \end{vmatrix} = 0$$

$$m^2 c^4 \rightarrow E^2 + c^2 (\hat{\sigma} \hat{p})^2 = 0$$

$$(\hat{\sigma} \vec{a})(\hat{\sigma} \vec{b}) = (\vec{a} \cdot \vec{b}) + i(\hat{\sigma} \cdot [\vec{a} \times \vec{b}])$$

$$(\vec{\sigma} \vec{p})(\hat{\sigma} \vec{p}) = (p)^2$$

$$E = \pm \sqrt{m^2 c^4 + c^2 (\vec{p})^2}$$

Если  $E > 0$ , удобно использовать решение

$$w' = \frac{c(\hat{\sigma} \vec{p})}{E + mc^2} w$$

Если ввести,  $w = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$   $\vec{p} = p_z \vec{k}$  то решение будет иметь вид:

$$w' = \begin{pmatrix} \frac{c p_z A}{E + mc^2} \\ -\frac{c p_z B}{E + mc^2} \end{pmatrix}$$

$$\vec{p} = p_z \vec{k}$$

$$\hat{\sigma}_3 p_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} p_z$$

Тогда:

$$u = \begin{pmatrix} A \\ B \\ \frac{c p_z A}{E + mc^2} \\ -\frac{c p_z B}{E + mc^2} \end{pmatrix} \rightarrow \approx \frac{c p_z A}{2 mc^2} \approx \frac{c m V_z A}{2 mc^2} = \frac{V_z}{2c} A \quad u = \begin{pmatrix} A \\ B \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$w = \frac{c(\hat{\sigma} \hat{p})}{E - mc^2}$$

$$w' = \begin{pmatrix} D \\ F \end{pmatrix} \quad u = \begin{pmatrix} \frac{c p_z D}{E - mc^2} \\ -\frac{c p_z F}{E - mc^2} \\ D \\ F \end{pmatrix}$$

$$E \approx -mc^2 \quad u = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ D \\ F \end{pmatrix}$$

Решение уравнения Дирака для свободной частицы имеет вид:

$$\Psi(x, y, z, t) = \int u(A, B) \exp\left(-\frac{iEt}{\hbar}\right) \exp\left(\frac{i \vec{p} \vec{r}}{\hbar}\right) d^3 p + \int v(D, F) \exp\left(\frac{i|E|t}{\hbar}\right) \exp\left(\frac{i \vec{p} \vec{r}}{\hbar}\right) d^3 p$$

Отрицательная энергия отвечает позитрону.